Basisprüfung Lineare Algebra

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Datum	Montag, 5. Februar 2018	

1	2	3	4	5	6	Total
6 P	6 P	6 P	6 P	6 P	6 P	36 P

Wichtige Hinweise:

- *Dieses Deckblatt darf erst auf Anweisung des Assistenten umgeblättert werden!*
- Bitte füllen Sie zuerst dieses Deckblatt aus.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und verstauen Sie es in Ihrer Tasche.
- Legen Sie Ihre **Legi** auf den Tisch.
- Prüfungsdauer: **120 Minuten**.
- Erlaubte Hilfsmittel: **Keine**.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet (jeweils 6 Punkte).
- Begründen Sie Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert! Davon ausgenommen ist nur Aufgabe 6 (Multiple-Choice-Aufgabe).
- Tragen Sie die Lösung von Aufgabe 6 (Multiple-Choice-Aufgabe) auf dem Extrablatt (letzte Seite dieser Prüfung) ein.
- Beginnen Sie jede der sechs Aufgaben auf einer neuen Seite und schreiben Sie Ihren Namen auf **alle** Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Versuchen Sie, Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen, und arbeiten Sie sorgfältig.

Viel Erfolg!

1. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) [1.5 Punkte] Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

c) [3.5 Punkte] Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

2. [6 Punkte] Gegeben sei das Differentialgleichungssystem erster Ordnung $\dot{y} = A\,y$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) [2.5 Punkte] Bestimmen Sie eine Transformationsmatrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = TDT^{-1}$.

b) [2 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{y} = A\,y$, indem Sie die neuen Variablen $x(t) = T^{-1}y(t)$ einführen.

Hinweis: Für $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\dot{z} = az$ gegeben durch $z(t) = c\,e^{at}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Zum Beispiel gilt für $a = -2$: Die Differentialgleichung $\dot{z} = -2z$ hat die Lösung $z(t) = c\,e^{-2t}$, wobei die Konstante c aus der Anfangsbedingung $z(0) = c$ bestimmt werden kann.

c) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{y} = A\,y$ zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. [6 Punkte] Gegeben sei das folgende Ausgleichsproblem: Finde $x \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$\|Ax - b\|_2 = \min_{v \in \mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2, \tag{1}$$

wobei

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) [5 Punkte] Lösen Sie (1) mithilfe einer Singulärwertzerlegung.

b) [1 Punkt] Schreiben Sie die Normalengleichungen für (1) in kompakter Form und lösen Sie sie.

Siehe nächstes Blatt!

4. **[6 Punkte]** Seien $\mathcal{G}_3 = \operatorname{span}\{1, t^2, t^4\}$ und $\mathcal{U}_2 = \operatorname{span}\{t, t^3\}$ zwei Vektorräume von Polynomen. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}_3$ nach $\mathcal{U}_2$:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & \mathcal{G}_3 & \longrightarrow & \mathcal{U}_2 \\ & x(t) & \longmapsto & t\,x''(t), \end{array}$$

das heisst, für $x \in \mathcal{G}_3$ ist $\mathcal{A}x \in \mathcal{U}_2$ gegeben durch $(\mathcal{A}x)(t) = t\,x''(t)$.

a) **[1 Punkt]** Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

b) **[1 Punkt]** Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben, wenn wir die Monome als Basen in beiden Räumen verwenden?

c) **[2 Punkte]** Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von $\mathcal{G}_3$ beziehungsweise $\mathcal{U}_2$ sind, wobei

$$p_1(t) = 1 + t^2, \qquad p_2(t) = 1 - t^2, \qquad p_3(t) = 1 + t^2 + t^4$$

und

$$q_1(t) = t, \qquad q_2(t) = 3\,t + 2\,t^3.$$

d) **[2 Punkte]** Welches ist die neue Matrix B, durch die $\mathcal{A}$ nach dem Basiswechsel in die neuen Basen $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2\}$ aus Teilaufgabe **c)** beschrieben wird?

5. **[6 Punkte]** Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$. In dieser Aufgabe betrachten wir die Matrix

$$H = I - \frac{2}{v^T v} v v^T \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

wobei I die n-dimensionale Einheitsmatrix ist.

a) **[4 Punkte]** Beweisen Sie, dass H eine Orthogonalmatrix ist.

b) **[2 Punkte]** Beweisen Sie, dass $H^2 = I$ gilt.

6. [6 Punkte] Multiple-Choice: Auf dem Extrablatt "Richtig" oder "Falsch" ankreuzen.

a) [1 Punkt] Ein lineares Gleichungssystem mit m Zeilen, n Spalten und Rang r ist *nicht* für beliebige rechte Seiten lösbar, wenn $m > n$.

b) [1 Punkt] Sei A eine $m \times n$-Matrix mit $m > n$, so dass $A^T A$ die Einheitsmatrix ist, und sei B eine $n \times m$-Matrix, so dass BA orthogonal ist. Dann ist auch AB orthogonal.

c) [1 Punkt] In jedem Vektorraum mit Skalarprodukt können wir eine beliebig grosse Familie von Einheitsvektoren finden, die paarweise orthogonal sind.

d) [1 Punkt] Eine LR-Zerlegung der Matrix A liefert die Rechtsdreiecksmatrix

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} .$$

Daraus folgt $\det A = 25$.

e) [1 Punkt] Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

und die Menge $L = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^2\}$. Dann ist L ein Unterraum des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ und die Vektoren $a^{(1)} = \begin{bmatrix}1, & 0, & 2\end{bmatrix}^T$ und $a^{(2)} = \begin{bmatrix}0, & 1, & -3\end{bmatrix}^T$ bilden ein Erzeugendensystem von L.

f) [1 Punkt] Sei $\{a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Dann muss gelten $k \leq n$.

Extrablatt: Aufgabe 6

Name: ____________________________

Tragen Sie auf dieses Extrablatt die Lösungen zu den "Richtig oder Falsch"-Fragen aus Aufgabe 6 ein, indem Sie das Kästchen **ankreuzen**, welches der korrekten Antwort entspricht. Tragen Sie oben Ihren Namen ein.

Bewertungsschema: Jede *korrekte* Antwort gibt einen Punkt, jedes *nicht korrekt gesetzte* Kreuz gibt einen Punkt Abzug. Für jede Teilaufgabe, für die *kein Kreuz* gemacht wurde, gibt es 0 Punkte. Die Summe der Punktzahlen für die ganze Aufgabe 6 wird, falls negativ, auf 0 aufgerundet.

Teilaufgabe	Richtig	Falsch
a)	☐	☐
b)	☐	☐
c)	☐	☐
d)	☐	☐
e)	☐	☐
f)	☐	☐